Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Hinweise für die Abiturientinnen und Abiturienten

Abiturprüfung **2002**

Haupttermin **Leistungskurs** Mathematik

Bearbeitungszeit: **240** Minuten

Hilfsmittel: Funktionentafel mit mathematischem Formelanhang
Taschenrechner (nicht programmierbar)

Hinweise: Sie erhalten **zwei** Aufgaben.

Sie sind verpflichtet, die Ihnen vorgelegten **zwei** Aufgaben zu bearbeiten.

Verwenden Sie für die Reinschrift und den Entwurf je Aufgabe **einen neuen** Bogen.

Vermerken Sie auf **jedem Bogen** die Nummer der bearbeiteten Aufgabe.

Sie sind verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn (auf Anzahl der Blätter, Anlagen usw.) zu überprüfen.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet.

Zu jedem $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{x^2 + x + t}{4(x+1)}; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_4.

Zeigen Sie, dass K_4 symmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten ist.

Zeichnen Sie K_4 samt Asymptoten.

(9 VP)

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Anzahl der Punkte von K_t mit waagrechter Tangente.

Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt $\frac{f_4(x) + f_{-4}(x)}{2} = \frac{1}{4}x$.

Tragen Sie K_{-4} in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) ein.

(7 VP)

c) Die Schaubilder K_4, K_{-4}, die Geraden $x = u$ und $x = 2u$ mit $u > 0$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt $A(u)$ ein.

Bestimmen Sie $A(u)$.

Untersuchen Sie, ob $A(u)$ für $u \to \infty$ einen Grenzwert besitzt.

(7 VP)

d) An einem Tag beträgt morgens um 6 Uhr die Lufttemperatur 5 Grad.

Für den Tagesverlauf bis in die späten Abendstunden hinein lässt sich die momentane Änderungsrate der Temperatur erfahrungsgemäß angeben durch $d(t) = -\frac{1}{6}t + \frac{3}{2}$

(t in Stunden seit 6 Uhr; d(t) in Grad pro Stunde).

Wie hoch wird demnach die Temperatur um 14 Uhr sein?

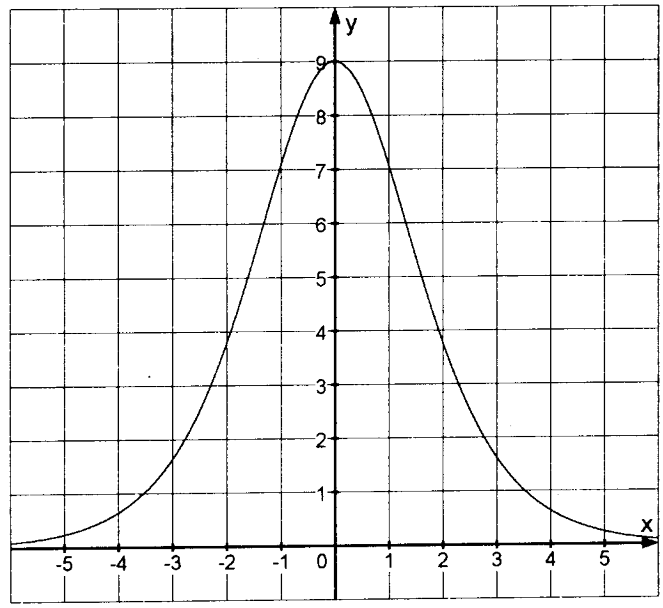
Welche Maximaltemperatur wird an diesem Tag erwartet?

Wie hoch ist der Mittelwert der an diesem Tag zwischen 8 Uhr und 16 Uhr erwarteten Temperaturen?

(7 VP)

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \dfrac{a \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild sei K_a.



a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Schaubild K_a.
Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.
Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K_{36} und dem Schaubild von g.
Für welche Werte von a hat K_a mit dem Schaubild von g einen Punkt gemeinsam?
(8 VP)

b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x)$; $x \in \mathbb{R}$.
K_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche.
Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt hat.
(7 VP)

Durch $F(t) = \dfrac{36 \cdot e^t}{1+e^t}$ wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und F(t) in cm^2 gemessen.

c) Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus?
Wie groß ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit?
Weisen Sie nach, dass F eine Differenzialgleichung der Form $F'(t) = k \cdot F(t) \cdot [G - F(t)]$ erfüllt.
Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?
Skizzieren Sie das Schaubild von F für $-5 \leq t \leq 5$.
(9 VP)

d) Zeigen Sie: Für kleine Werte von F(t) gilt näherungsweise die Differenzialgleichung $F'(t) = F(t)$.
Geben Sie eine mögliche Lösungsfunktion dieser Differenzialgleichung an, die für kleine Werte von F(t) näherungsweise den Inhalt der bedeckten Fläche beschreibt.
(6 VP)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{4 \cdot (\ln x)^2}{x}; \; x > 0.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte.

Geben Sie die Asymptoten von K an.

Zeichnen Sie K.

(8 VP)

b) Berechnen Sie den Inhalt A(z) der Fläche, die von K, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = z$ $(0 < z < 1)$ begrenzt wird.

Für welches z gilt $A(z) = 36$?

Untersuchen Sie A(z) für $z \to 0$.

(8 VP)

c) Die Tangente an K im Kurvenpunkt $P(\,u \mid f(u)\,)$ schneidet die y-Achse im Punkt S.

Für welche u ist die Ordinate von S positiv?

(6 VP)

d) C sei das Schaubild einer auf IR differenzierbaren Funktion h.

$R\,(\,t \mid h(t)\,)$ sei ein Punkt auf C, der nicht auf einer der Koordinatenachsen liegt.

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

Wenn die Länge der Strecke OR einen Extremwert annimmt, dann gilt $t + h(t) \cdot h'(t) = 0$.

Wenn die Länge der Strecke OR einen Extremwert annimmt, dann ist OR orthogonal zur Tangente an C im Punkt R.

(8 VP)

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg

Abiturprüfung **2002** | Leistungskurs **Mathematik** | Aufgabe **II 1**

Haupttermin | **Analytische Geometrie**

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

sowie für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade h_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2a-2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

Alle Geraden h_a liegen in einer Ebene E.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h_1.
Zeigen Sie, dass g mit jeder Geraden h_a genau einen Punkt gemeinsam hat.
Untersuchen Sie, ob a so gewählt werden kann, dass g und h_a orthogonal sind.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
(Teilergebnis: $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 9 = 0$)

(10 VP)

b) Gegeben ist die Kugel $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 + 22x_2 - 30x_3 + 137 = 0$.
Bestimmen Sie ihren Radius und zeigen Sie, dass ihr Mittelpunkt auf g liegt.
Berechnen Sie für den Schnittkreis von K und E die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius.
Zeigen Sie, dass der Punkt $P(3|-7|7)$ ein innerer Punkt von K ist.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene E^*, die durch P geht und aus K einen Kreis mit möglichst kleiner Fläche ausschneidet.

(10 VP)

c) Es gibt Kugeln mit Radius $r = 6$, die E berühren und deren Mittelpunkte auf g liegen.
Bestimmen Sie diese Mittelpunkte.
Untersuchen Sie, ob es eine Gerade h_a gibt, die gemeinsame Tangente dieser Kugeln ist.

(10 VP)

Die Punkte $P(-6|-4|0)$ und $Q(0|-1|3)$ liegen auf der Geraden g.

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Kugel K_a gegeben durch K_a: $(x_1+2)^2+(x_2-a)^2+(x_3+1)^2=9$.

a) Die Gerade g schneidet die Kugel K_{-2} in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.
Bestimmen Sie Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel K_{-2} in den Punkten S_1 und S_2.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden und den Schnittwinkel dieser Tangentialebenen.
Die Ebene $E: 2x_1+x_2-5x_3=-16$ schneidet die Kugel K_{-2}.
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises.

(10 VP)

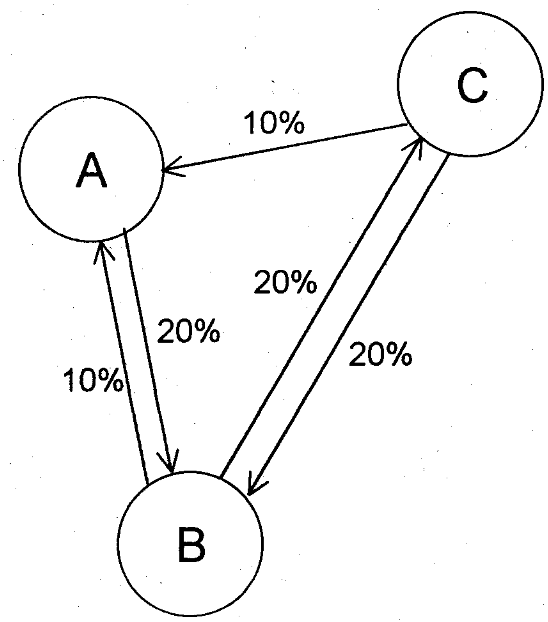
b) Auf welcher Geraden liegen die Mittelpunkte aller Kugeln K_a?
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E^*, die eine Kugel K_a mit $a<0$ im Ursprung O berührt.
Welche weitere Kugel K_{a^*} hat die Ebene E^* ebenfalls als Tangentialebene?
Für welchen Wert von a liegt die Kugel K_a möglichst nahe beim Punkt $T(-4|6|-8)$?

(10 VP)

c) In einem fiktiven Staat stehen drei Parteien A, B und C zur Wahl. Bei der letzten Wahl stimmten 10 Millionen Wähler für A, 15 Millionen für B und 5 Millionen für C.

Eine Prognose für künftige Wahlen basiert auf folgenden Annahmen:

- Die Gesamtzahl der Wähler bleibt gleich.
- Die Wählerwanderung wird durch das nebenstehende Diagramm beschrieben.



Stellen Sie eine zugehörige Übergangsmatrix auf.
Welche Stimmenverteilung wird nach der nächsten Wahl erwartet?
Gibt es eine Anfangsverteilung der Wählerstimmen, bei der nach den oben angegebenen Annahmen alle Parteien wieder gleich viele Stimmen erhalten würden wie bei der Wahl zuvor?

(10 VP)